Cours de mathématiques P.S.I.*

D'après les cours de M. Guillaumie

Henriet Quentin

Fonctions vectorielles - Dérivation

Dans ce chapitre, E désigne un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ de dimension finie p, I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, f une application de I dans E, $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p)$ une base de E, et $f_1,\dots,f_p$ les applications composantes de f dans la base $\mathcal{B}$.

1. Dérivée d'ordre 1

1.1. Dérivabilité en un point

Définition :

Soit $a\in I$. On dit que f en dérivable en a si et seulement si $t\mapsto\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$ admet une limite L en a.

Dans ce cas, L est appelé vecteur dérivé de f en a. Il est noté $f'(a)$, $\dfrac{df}{dx}(a)$, ou $\mathrm{D}f(a)$.

Théorème :

f est dérivable si et seulement si il existe $L\in E$ et $\varepsilon\in\mathscr{C}(J\setminus\{0\},E)$ tels que $f(a+h)=f(a)+hL+h\varepsilon(h)$, avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$, et où J désigne l'intervalle déduit de I par translation de a : $J=\{x-a,\ x\in I\}$.

Remarque :

f est donc dérivable en a si et seulement si f admet un développement limité en a à l'ordre 1.

Définition :

Soit $a\in I$. On dit que f est dérivable à droite en a si et seulement si $f_{|[a,+\infty[\cap I}$ est dérivable en a, autrement dit si et seulement si $t\mapsto\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$ admet une limite à droite en a. Cette dérivée à droite est notée $f_d'(a)$.

Remarque :

On peut définir de même la dérivée à gauche en a.

Remarque :

f est dérivable en a $\Leftrightarrow$ f est dérivable à droite et à gauche en a, et $f_d'(a)=f_g'(a)$.

Théorème :

f est dérivable en a $\Leftrightarrow$ $\forall\, i\in[\![1,p]\!]$, f_i est dérivable en a, et dans ce cas, $f'(a)=\sum\limits_{i=1}^{p}f_i'(a)e_i$.

Remarque :

Ce théorème permet de se ramener au cas de fonctions scalaires.

Proposition :

Dans le cas où $E=\mathbb{C}$, f est dérivable en a $\Leftrightarrow$ $\Re\mathrm{e}(f)$ et $\Im\mathrm{m}(f)$ sont dérivables en a, et dans ce cas, $f'(a)=(\Re\mathrm{e}(f))'(a)+i(\Im\mathrm{m}(f))'(a)$.

1.2. Fonction dérivée

Définition :

On dit que f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en tout point de I.

La fonction $x\in I\mapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée (première) de f sur I. Elle est notée f', $\dfrac{df}{dx}$, ou $\mathrm{D}f$.

L'ensemble des fonctions dérivables sur I est noté $\mathcal{D}(I,E)$.

Définition :

On dit que f est continûment dérivable (ou de classe $\mathscr{C}^1$) sur I si et seulement si f est dérivable sur I, et si la fonction dérivée f' est continue sur I.

L'ensemble des fonctions continûment dérivables sur I est noté $\mathscr{C}^1(I,E)$.

Théorème :

f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I $\Leftrightarrow$ $\forall i\in[\![1,p]\!]$, f_i est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et dans ce cas, $f'=\sum_{i=1}^{p} f_i' e_i$.

Proposition :

1. $f\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{C})$ $\Leftrightarrow$ $\Re\mathrm{e}(f)\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ et $\Im\mathrm{m}(f)\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$, et dans ce cas, $\forall x\in I$, $f'(x)=\left(\Re\mathrm{e}(f)\right)'(x)+i\left(\Im\mathrm{m}(f)\right)'(x)$.
2. $f\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{C})$ $\Leftrightarrow$ $\overline{f}\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{C})$, et dans ce cas, $\forall x\in I$, $\left(\overline{f}\right)'(x)=\overline{f'(x)}$.

Proposition :

Soient f et $g\in\mathscr{C}^1(I,E)$.

1. $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, $\lambda f+\mu g\in\mathscr{C}^1(I,E)$, et $(\lambda f+\mu g)'=\lambda f'+\mu g'$.
2. $\mathscr{C}^1(I,E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et l'application $f\mapsto f'$ est linéaire.
3. $\forall\lambda\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$, $\lambda f\in\mathscr{C}^1(I,E)$, et $(\lambda f)'=\lambda' f+\lambda f'$.
4. $\mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Proposition :

Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, $f\in\mathscr{C}^1(I,E)$, et $g\in\mathscr{C}^1(J,I)$. $f\circ g\in\mathscr{C}^1(I,E)$, et $(f\circ g)'=g'\times f'\circ g$.

Proposition :

Soient F un autre espace vectoriel de dimension finie, $f\in\mathscr{C}^1(I,E)$, $u\in\mathscr{L}(E,F)$.
$u(f)\in\mathscr{C}^1(I,F)$, et $(u(f))'=u(f')$.

Preuve :

Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p)$ une base de E, $\mathcal{C}=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r)$ une base de F. Soit $A=\mathscr{M}_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}(u)=(a_{i,j})\in\mathscr{M}_{r,p}(\mathbb{K})$.

$$\forall t\in I,\ \text{ si } f(t)=\begin{pmatrix} f_1(t)\\ \vdots\\ f_p(t)\end{pmatrix}_{\mathcal{B}},\ \text{ alors} u\circ f(t)=A\times\begin{pmatrix} f_1(t)\\ \vdots\\ f_p(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_{1,j}f_j(t)\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{p} a_{r,j}f_j(p)\end{pmatrix}.$$

Notons $\forall i\in[\![1,r]\!]$, $g_i\ :\ t\in I\mapsto\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}f_j(t)$. $g_1,\dots,g_r$ sont les applications composantes de $u\circ f$ dans la base $\mathcal{C}$.

$\forall j\in[\![1,p]\!]$, $f_j\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$. Par combinaison linéaire, $g_i\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$.

Donc $u\circ f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et $g_i'=\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}f_j'$. De plus, $A\begin{pmatrix} f_1'(t)\\ \vdots\\ f_p'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g_1'(t)\\ \vdots\\ g_p'(t)\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $g'=u\circ f'$.

Proposition :

Soient F et G deux espaces vectoriels de dimension finie, $f\in\mathscr{C}^1(I,E)$, et $g\in\mathscr{C}^1(I,F)$.
Si B est une application linéaire de $E\times F$ dans G, alors $B(f,g)\in\mathscr{C}^1(I,G)$, et $\left(B(f,g)\right)'=B(f',g)+B(f,g')$.

Remarque :

Cette proposition permet, en particulier, de dériver des fonctions définies à l'aide de produits scalaires ou de produits vectoriels.

2. Dérivées d'ordre supérieur

2.1. Définitions et notations

Définition :

Soit $a \in I$. On dit que f est deux fois dérivable en a si et seulement si f est dérivable sur I, et si f' est dérivable en a. La dérivée de f' est appeée dérivée seconde ou d'ordre 2 de f en a.

Elle est notée $f''(a)$, $\dfrac{d^2 f}{dx^2}(a)$, ou $\mathrm{D}^2 f(a)$.

On dit que f est deux fois dérivable sur I si et seulement si f est deux fois dérivable en tout point de I.

Dans ce cas, l'application $x \in I \mapsto f''(x)$ est appelée fonction dérivée seconde, ou d'ordre 2, de f sur I.

Elle est notée f'', $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$, ou $\mathrm{D}^2 f$.

Définition :

On définit alors par récurrence les dérivées successives en a de la façon suivante :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est $n+1$ fois dérivable en a si et seulement si f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est dérivable en a. La dérivée de $f^{(n)}$ en a est appelée dérivée d'ordre $n+1$ de f en a.

Elle est notée $f^{(n+1)}(a)$, $\dfrac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}(a)$, ou $\mathrm{D}^{n+1} f(a)$.

On dit alors que f est $n+1$ fois dérivable sur I si et seulement si f est $n+1$ fois dérivable en tout point de I.

Dans ce cas, l'application $f \in I \mapsto f^{(n+1)}(x)$ est appelée fonction dérivée d'ordre $n+1$ de f sur I.

Elle est notée $f^{(n+1)}$, $\dfrac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}$, ou $\mathrm{D}^{n+1} f$.

Remarque :

Par convention, on note aussi $f = f^{(0)}$.

Définition :

L'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I est noté $\mathrm{D}^n(I, E)$.

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si et seulement si f est n fois dérivable sur I et $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $f^{(k)}$ est continue sur I.

Enfin, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si et seulement si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I pour tout entier n.

L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I est noté $\mathscr{C}^n(I, E)$.

L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I est noté $\mathscr{C}^\infty(I, E)$.

2.2. Dérivées usuelles de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$

Fonction	Dérivée $n^{\text{ème}}$	Domaine
$(t-a)^\alpha$, $(a, \alpha) \in \mathbb{R}^2$	$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(t-a)^{\alpha-n}$	$]a, +\infty[$
$(t-a)^p$, $a \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$	$\dfrac{p!}{(p-n)!}(t-a)^{p-n}$ si $n \leqslant p$ 0 si $n > p$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{(t-a)^p}$, $a \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{(p+n-1)!}{(p-1)!}\dfrac{(-1)^n}{(t-a)^{p+n}}$	$\mathbb{R} \setminus \{a\}$ si $a \in \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ si $a \in \mathbb{C}$
$\ln(t)$	$\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{t^n}$ si $n \geqslant 1$	$\mathbb{R}_+^*$
$\cos(t)$	$\cos\left(t + n\dfrac{\pi}{2}\right)$	$\mathbb{R}$
$\sin(t)$	$\sin\left(t + n\dfrac{\pi}{2}\right)$	$\mathbb{R}$

Propriété :

$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $f \in \mathscr{C}^{n+m}(I, E) \Leftrightarrow f \in \mathscr{C}^n(I, E)$, et $f^{(n)} \in \mathscr{C}^m(I, E)$. Dans ce cas, $f^{(n+m)} = \dfrac{d^n\left(f^{(m)}\right)}{dx^n}$.

2.3. Règles de calcul

Proposition :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I $\Leftrightarrow$ $\forall i \in [\![1, p]\!]$, f_i est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.

   Dans ce cas, $f^{(n)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} f_i^{(n)} e_i$.
2. f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I $\Leftrightarrow$ $\forall i \in [\![1, p]\!]$, f_i est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

Proposition :

1. Soient $n\in\mathbb{N}^*$, f et $g\in\mathscr{C}^n(I,E)$. $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, $\lambda f+\mu g\in\mathscr{C}^n(I,E)$, et $(\lambda f+\mu g)^{(n)}=\lambda f^{(n)}+\mu g^{(n)}$.
   Ainsi $\mathscr{C}^n(I,E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et l'application $f\mapsto f^{(n)}$ est linéaire.
2. Soient f et $g\in\mathscr{C}^\infty(I,E)$. $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, $\lambda f+\mu g\in\mathscr{C}^\infty(I,E)$.
   Ainsi $\mathscr{C}^\infty(I,E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition : Formule de Leibniz :

1. Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $f\in\mathscr{C}^n(I,\mathbb{K})$, et $g\in\mathscr{C}^n(I,E)$. Alors $fg\in\mathscr{C}^n(I,E)$, et $(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}$.
   Ainsi $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
2. Soient $f\in\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{K})$, et $g\in\mathscr{C}^\infty(I,E)$. Alors $fg\in\mathscr{C}^\infty(I,E)$.
   Ainsi $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Proposition :

1. Soient $n\in\mathbb{N}^*$, J un intervalle de $\mathbb{R}$, $f\in\mathscr{C}^n(I,E)$, $g\in\mathscr{C}^n(J,I)$. Alors $f\circ g\in\mathscr{C}^n(I,E)$.
2. Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, $f\in\mathscr{C}^\infty(I,E)$, $g\in\mathscr{C}^\infty(J,I)$. Alors $f\circ g\in\mathscr{C}^\infty(I,E)$.

2.4. $\mathscr{C}^n$-difféomorphisme

Définition :

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et φ une application de I dans J, où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.
On dit que φ est un $\mathscr{C}^n$-difféomorphisme de I sur J si et seulement si :

1. φ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I
2. φ est une bijection de I sur J
3. L'application réciproque φ^{-1} est de classe $\mathscr{C}^n$ sur J.

Théorème :

φ est un $\mathscr{C}^n$-difféomorphisme de I sur J si et seulement si :

1. φ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I
2. $\varphi(I)=J$
3. $\forall t\in I$, $\varphi'(t)\neq 0$.

Remarque :

Les $\mathscr{C}^n$-difféomorphismes sur I sont les fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, strictement monotones, et dont la dérivée ne s'annule pas.

2.5. Fonctions $\mathscr{C}^n$ par morceaux

Définition :

Soient $n\in\mathbb{N}^*$, et $[a,b]\in I$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ par morceaux sur $[a,b]$ si ei seulement si il existe une subdivision $(a_0,\dots,a_N)$ de $[a,b]$ telle que $\forall i\in[\![0,N-1]\!]$, $\varphi_i\in\mathscr{C}^n([a_i,a_{i+1}],E)$ et $\forall t\in]a_i,a_{i+1}[$, $f(t)=\varphi_i(t)$.
On dit alors que f est de classe $\mathscr{C}^n$ par morceaux sur I si et seulement si f est de classe $\mathscr{C}^n$ par morceaux sur tout segment inclus dans I.
On note $\mathscr{C}_m^n(I,E)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ par morceaux sur I.

Remarques :

Une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ par morceaux sur un segment est n fois dérivable en tout point de ce segment, sauf éventuellement en un nombre fini de points. On note encore $\mathrm{D}^n f$ ou $f^{(n)}$ la fonction dérivée d'ordre n définie en dehors de ces points. Si $f\in\mathscr{C}_m^n(I,E)$, alors $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $f\in\mathscr{C}_m^k(I,E)$.

* * * * *